

MA-3111—Primer Parcial —

1. Exprese $\sqrt{1+x}\delta''(x)$ en la forma $c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x)$.
2. a) Construya $E(x)$ causal y suave a trozos, cumpliendo $E''_{\text{gen}} + E = \delta(x)$.
b) Suponga que $f(x)$ es suave a trozos, tiene soporte compacto y cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(x) dx = 0.$$

Demuestre que hay $u(x)$, también de soporte compacto, con $u''_{\text{gen}} + u = f$. (Sugerencia: examine $u = E * f$)

3. Existe $g(x)$, causal y suave a trozos cuya transformada de Laplace es

$$\frac{1}{z^2 + 2z + 10}.$$

- a) Exprese g''_{gen} como una combinación lineal de $g'_{\text{gen}}(x)$, $g(x)$ y $\delta(x)$.
 - b) Halle $g(x)$ en forma explícita.
4. Existe $w(t) \in C^\infty$ que cumple $w''(t) + 2w'(t) + w(t) = t^2$, junto con las condiciones iniciales $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$. Hallar la transformada de Laplace de $u(t) = H(t)w(t)$, donde H es la función de Heaviside.